

변형량이 큰 유연보의 진동특성 이론해석

Theoretical Analysis of Vibration Characteristics of Flexible Beams with Large Deformation

김동현*¹⁾

Donghyun Kim*¹⁾

[초 록]

경량화된 장비는 고탄성 재질을 광범위 하게 사용하여 적은 중량으로 높은 하중을 견디게 하는 설계 개념을 적용하고 있다. 이러한 구조물은 가진 현상 발생시 혹은 제어 구동 시에 큰 변형이 발생하면 비선형 특성이 생성 된다. 이러한 비선형 현상의 특질 중에 시스템의 제어 성능에 영향을 주는 요소는 주파수 연동 현상과 고유 진동수 변화를 들 수 있으며, 본 논문에서는 이론적인 해석을 통하여 주파수 연동 현상과 고유 진동수 변화 현상을 해석 한다.

[ABSTRACT]

The lightweight equipment adopts a design concept that withstands high loads with low weight by using a wide range of highly elastic materials. Such a structure generates nonlinear characteristics when an excitation phenomenon occurs or when a large deformation occurs during a control operation. Among the characteristics of these nonlinear phenomena, factors that affect the control performance of the system are frequency-linked phenomenon and natural frequency change. In this paper, frequency-linked phenomenon and natural frequency change phenomenon are analyzed through theoretical analysis.

Key Words : 고탄성 재질(High elastic material), 비선형 특성(Nonlinear characteristics), 주파수 연동(Frequency linkage), 진동수 변화(Change in frequency)

1. 서 론

외력에 대한 변위가 큰 구조물은 그 크기에 비하여 중량이 적어서 시스템의 자세 제어를 수행할 때의 동적 거동을 분석하여 보면 관성력의 영향으로 큰 변형이 발생하고, 이러한 현상은 고유진동수의 변화를 수반하여 시스템 제어 시에 영향을 주게 된다. 이러한 비선형적 현상은 이론적인 해석을 통하여 그 크기를 해석할 수 있는 것으로 알려져 있다. Nayfeh와 Pai는 유연한 비선형 보에 인자 진동(parametric excitation)의 가진 조건에서의 이론 해를 산출하였으며^[1], Zevonday 등은 유연한 보에 집중하중이 인가하였을 경우의 이론 해를 다차 가중치 해석 법(multiple scale method)을 이용하여 구하

고, 실험을 통하여 인자 진동 조건에서 비선형 보에서 발생하는 가진 주파수 응답의 비선형 적인 현상을 관찰하였다^[2]. Crespo 와 Glynn은 매우 긴 유연한 비선형 보에서 발생하는 토손의 영향을 비선형 해석기법을 이용하여 해석하였으며^[4], Nayfeh와 Mook는 그의 책 'Nonlinear Oscillation'에서 비선형 보와 여러 가지 진동계의 비선형 적인 해석기법을 제시하였고, Hou 와 Yunn은 비선형 보의 고유치와 고유치 벡터를 해석하는 기법을 소개하였다^[5]. 또한 Anderson 등은 외팔보 형태의 비선형 보에 대한 해와 가진 주파수, 위상, 진폭에 대한 상호관계를 이론적 해석을 통하여 분석하였다^[6].

2. 본 론

2.1 비선형보의 운동 방정식

비선형 보의 지배 방정식을 구하는 대상 모델은 다음 그림과 같이 수직 방향의 외팔보(의 형태를 갖으며, 비선형 보를 가진 시키는 방법은 밑에서 수평방향으로 이동시키는 것이다. 운동방정식을 유도하는 데에 있어서, 보의 두께가 길이에 비하

1) 한양대학교 생존 신호정보 연구센터(Research center of Survival signals intelligence, Hanyang University, Korea)

* Corresponding author, E-mail: tomas020758@gmail.com

Copyright © The Korean Institute of Defense Technology

Received: August 5, 2019

Revised:

Accepted: August 20, 2019

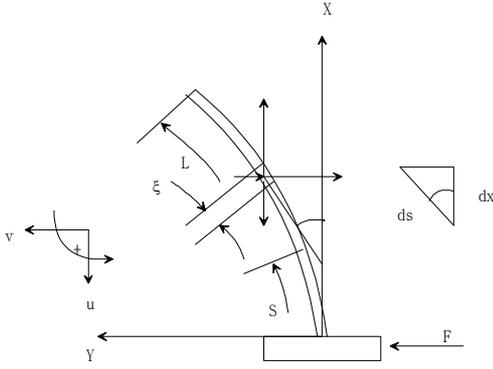


그림. 1 횡방향 가진력을 갖는 수직외팔보 모델
Fig. 1 Vertical cantilevered beam model with transverse excitation force

여 대단히 작아서 전단변형과 보의 회전 관성량을 무시하는 가정을 적용하였다. 또한 보의 횡 방향 진동 크기가 시스템의 주요한 사항이므로, 보의 축 방향 공진 현상 또한 무시하였다. 이것은 보의 축 방향의 공진이 굽힘 방향의 공진 주파수 보다 매우 높은 주파수 대역의 성분을 갖고 있을 것으로 생각되기 때문인 점도 고려되었고, 같은 이유로 보의 토손에 의한 변형 주파수도 무시되었다. 가진에 의한 변위가 매우 큰 비선형 보의 운동 방정식을 산출하기 위하여 Euler Bernoulli 이론을 이용하였다. 그림1 에서 's'점에서 작용하는 굽힘 모멘트는 구하면

$$M(s) = EI k(s) \quad (2-1)$$

이 되고, 식(2-1)에서 정의된 변수는

E : Young's Modulus
 I : Cross-Sectional Moment of Inertia
 $k(s)$: radius of curvature at section

이다. 곡률 반경 함수와 보의 굽힘각의 관계를 구하면

$$k(s) = \frac{\partial \phi}{\partial s} = \phi', \quad \sin(\phi) = v' \quad (2-2)$$

이 되고, 이때 는 임의 위치 의 굽힘 각의 기울기 이다. 식(2-2)에서 정의된 의 미분 항을 구하면,

$$\phi' = v'' / \sqrt{1 - v'^2} \quad (2-3)$$

$$\text{where } s^* = s/L, v^* = v/r, t^* = \frac{1}{L^3} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} t$$

r : radius of gyration for the cross section area
 K : stiffness of beam

cf: eq.(10) is dropped with the *

이 되고, 이것을 이용하여 식(2-1)에서 표시된 모멘트 방정식을 구하면,

$$M(s) = EI v'' (1 - v'^2)^{-0.5} \approx EI v'' (1 + 0.5 v'^2) \quad (2-4)$$

$M(s)$: Moment at section s

이 된다. 식(2-4)는 보의 임의의 점 에 작용되는 모멘트를 표시하는 것인데, 이식은 다음과 같은 두 가지의 모멘트 성분의 합 즉 수직 관성량 (lateral inertia)와 및 수평방향 관성량 (longitudinal inertia)의 원인으로 발생하는 외부 모멘트 (external moment)으로 표현이 가능하다.

$$M(s) = M_1(s) + M_2(s) \quad (2-5)$$

이러한 두 가지의 모멘트 성분을 적분으로 표현하면

$$M_1(s) = - \int_s^L (\rho \ddot{v} + c \dot{v}) \left(\int_s^\xi \cos \phi d\eta \right) d\xi \quad (2-6)$$

$$M_2(s) = - \int_s^L \rho (\ddot{u} - g) \left(\int_s^\xi \sin \phi d\eta \right) d\xi \quad (2-7)$$

이 되고, 이때의 축 방향의 변위는

$$U(\xi, t) = \xi - \int_0^\xi \omega s \phi d\eta \quad (2-8)$$

로 정의되며, 축 방향 변위 가속도 성분, 즉 변위를 두 번 미분 한 값을 기구학적 조건을 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$U(\xi, \ddot{u}) = \frac{1}{2} \int_0^\xi (v^2)'' d\eta \quad (2-9)$$

이 식들을 Euler-Bernoulli의 이론에 적용하여 보의 운동 방정식을 무 차원 수로 정리 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \ddot{v} + c\dot{v} + \left\{ v^{iv} + (v'(v'v''))' \right\} + \frac{1}{2} \left\{ v' \int_s^L \left(\int_0^s v'^2 ds \right) ds \right\} \\ & + (v''(s-1) + v') \frac{L^3}{K^3} mg \\ & = F\Omega^2 \cos \Omega t + CF\Omega s \sin \Omega t \end{aligned} \quad (2-10)$$

단 여기서 정의된 변수는 다음과 같다.

$$\text{where } s^* = s/L, v^* = v/r, t^* = \frac{1}{L^3} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} t$$

r : radius of gyration for the cross section area

K : stiffness of beam

cf: eq.(10) is dropped with the *

$$(2-11)$$

2.2 비선형 보의 이론해석

식 (2-10)의 비선형보의 운동방정식은 진동에 의한 보의 매우 큰 비선형 보의 운동을 해석하기 위한 운동방정식으로, 이러한 비선형 식을 풀기 위하여 시간에 변화에 따른 가중치를 분리한 비선형 해를 구하는 방법인 'method of multiple scale'^[3]을 활용하여 해석한다. 제시된 비선형 방정식의 항이 3차 항인 'cubic term'으로 되어 있으므로, 응답해 $v(s,t)$ 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$v(s, T_0, T_2 : \epsilon) = \epsilon v_1(T_0, T_2, \dots) + \epsilon^3 v_3(T_0, T_2, \dots) + \dots \quad (2-12)$$

단, 여기서 표현된 가중치가 포함된 시간 변수는 다음과 같이 정의 된다.

where $T_0 = t$ (fasts cale natural frequency har arentis effect)

$T_2 = \epsilon^2 t$ (slows cale amplitude & phase har arentis effect)

$\mu = \epsilon^3 \mu$

$F = \epsilon^3 f$

$$(2-13)$$

식(2-12)를 식(2-10)에 대입하고 외팔보의 경계조건을 고려하여 1차 항을 정리하면 다음과 같이 표현된다.

$$\epsilon^1; D_0^2 v_1 + v_1^{iv} = 0$$

$$B.C.; v_1 = v_1' = 0 \quad \text{at } s=0$$

$$v_1'' = v_1''' = 0 \quad \text{at } s=L$$

$$(2-14)$$

단 여기서 변위''는 식(2-11)에서 표현된 ''의 ''를 생략하여 표시한 것이다. 3차 항 역시 지배 방정식과 경계조건을 정리하

면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon^3; D_0^2 v_3 + v_3^{iv} = -2D_0 D_2 v_1 - \mu D_0 v_1 - \left[\int_0^s \left\{ \int_0^s (v_1^{i2}) ds \right\}'' ds \right]' \\ - \left\{ v_1' (v_1' v_1'') \right\}' + \left\{ v_1' (s-1) + v_1' \right\} g_0 + f \Omega^2 \cos \Omega T_0 \\ B.C.: v_3 = v_3' = 0 \quad \text{at } s=0 \\ v_3 = v_3'' = 0 \quad \text{at } s=1 \end{aligned} \quad (2-15)$$

단, 여기서 표현된 변수는 다음과 같이 정의된다.

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0}, \quad D = \frac{\partial}{\partial T_2}, \quad g_0 = \frac{L^3 m g}{K \varepsilon^2}$$

보의 지배방정식에 대하여 변수 분리법에 의하여 해를 구하기 위하여 보의 응답 해를 모우드 함수와 시간에 따른 함수의 조합으로 다음과 같이 정의할 수 있겠다.

$$\begin{aligned} v_n(s, T, T_0, \dots) = \phi_n(s) (A(T_2) e^{i\omega_n T_0} + \text{complex conjugate}) \\ \varepsilon^3; D_0^2 v_3 + v_3^{iv} = -2D_0 D_2 v_1 - \mu D_0 v_1 - \left[\int_0^s \left\{ \int_0^s (v_1^{i2}) ds \right\}'' ds \right]' \\ - \left\{ v_1' (v_1' v_1'') \right\}' + \left\{ v_1' (s-1) + v_1' \right\} g_0 + f \Omega^2 \cos \Omega T_0 \\ B.C.: v_3 = v_3' = 0 \quad \text{at } s=0 \\ v_3 = v_3'' = 0 \quad \text{at } s=1 \end{aligned} \quad (2-16)$$

식(2-14)는 일반적인 선형 보의 운동방정식으로써 1차 항의 응답은 전형적인 선형 해를 구하는 방법으로 산출할 수 있다. 모우드 함수를 정의하여 보의 응답 해를 표현하면 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

$$v_1(s, T) = \sum_{i=1}^n \phi_i(s) G_i(t) \quad (2-17)$$

여기서 시간의 함수를 ' $G_i(t) = \omega s(\omega t + \beta)$ '의 조화 함수로 가정하면 식(2-14)의 모우드 함수는 다음과 같이 표현되고

$$\phi^{iv} - z_i^{iv} \phi = 0 \quad (2-18)$$

이때, 미분 방정식의 계수는 보의 물리량으로 다음과 같이 정의된다.

$$z_i^4 = \frac{\omega_i^2 \rho A}{EI} \quad (2-19)$$

모우드 해를 구하기 위하여, 함수 $\phi(s)$ 를 다음과 같이 가정하면,

$$\phi(s) = c_1 \cos z_i s + c_2 s \sin z_i s + c_3 \cos h z_i s + c_4 s \sinh z_i s$$

$$\begin{aligned} \text{where } \phi_{(s)}: \text{ solution for } \text{mof eq. (18)} \\ \omega_i = \text{natural frequency of beam} \end{aligned} \quad (2-20)$$

이 되고, (2-20)식에 경계조건을 적용하면

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 + c_4 = 0 \\ -c_1 \omega s z_i L - c_2 \sin z_i L + c_3 \omega s h z_i L + c_4 \sinh z_i L = 0 \\ c_1 \sin z_i L - c_2 \omega s z_i L + c_3 \sinh z_i L + c_4 \omega s h z_i L = 0 \end{aligned} \quad (2-21)$$

이 된다. 이때 'z'의 고유치는 다음의 방정식(2-22)를 만족한다.

$$\begin{bmatrix} \cos hL + \omega s hL & \sin hL + \sinh hL \\ \sin hL - \sinh hL & -\omega s hL - \omega s hL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

식(2-22)의 고유치를 구하기 위하여 특성방정식을 정의하면 다

음과 같이 표현되고

$$\det \begin{bmatrix} \omega s z_i L + \omega s h z_i L & \sin z_i L + \sinh z_i L \\ \sin z_i L - \sinh z_i L & -\omega s z_i L - \omega s h z_i L \end{bmatrix} = 0 \quad (2-23)$$

식(2-23)의 고유치는 다음 조건을 만족 하게 된다.

$$1 + \omega s z_i + \omega s h z_i = 0 \quad (2-24)$$

식(2-24)의 처음 3개의 근을 수치해석 기법인 'Newton Relphson'의 방법을 이용하여 구하면, z=1.8751, 4.6941, 7.8547 이 된다. 고유벡터(eigen vector)는 보의 경계조건과 식(2-20)을 이용하여 구하게 되는데, 이러한 조건을 정리하면 다음식 (2-25)으로 정리 된다.

$$\begin{aligned} \phi_i(s) = \cos h z_i s - \cos z_i s - \frac{\cos h z_i s + \cos z_i s}{s \sinh z_i s + s \sin z_i s} (-s \sinh z_i s + s \sin z_i s) \\ \text{where } \int_0^1 \phi_i^2(s) ds = 1 \end{aligned} \quad (2-25)$$

식(2-25)에서 정의된 식은 보의 모우드 형태 (mode shape)을 결정해 주는 식이며, 식(2-24)에서 산출된 고유치로 표현되는 보의 고유 진동수(natural frequency)는 다음과 같이 표현된다.

$$\text{Natural Frequency of Beam: } f_i = \frac{1}{2\pi} (z_i)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (2-26)$$

식(16)의 시간에 대한 비선형 항의 해를 구하기 위하여 Galerkin Method를 사용하여 보자. 비선형 해를 적용하기 위하여 응답함수를 다음과 같이 가정하면, 1차 항은

$$v_{11}(T_0, T_2) = A(T) e^{i\omega_n T_0} + \text{complex conjugate} \quad (2-27)$$

이 되고, 4차 항은

$$v_{3i}(T_0, T_2) = \int_0^1 \phi_n(s) v_3(s, T_0, T_2) ds \quad (2-28)$$

으로 표현된다. 식(27),(28)을 식(15)에 대입하여 정리하면, 비선형 특성이 고려된 지배 방정식은

$$\begin{aligned} D_0 v_{3i} + \omega_n^2 v_{3i} = -2D_0 D_2 v_{11} - \mu D_0 v_{11} - \alpha_1 v_{11}^3 - \frac{1}{2} \alpha_2 v_{11} D_0^2 \\ + \alpha_3 g_0 v_{11} + \alpha_4 f \Omega^2 \omega s \Omega T_0 \end{aligned} \quad (2-29)$$

이다. 단, 여기서 표현된 변수 ' $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$ '은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \int_0^1 \phi_n \left[\phi_n' (\phi_n' \phi_n'') \right]' ds \\ \alpha_2 &= \int_0^1 \phi_n \left[\phi_n' \int_0^s \phi_n^{i2} ds ds \right]' ds \\ \alpha_3 &= \int_0^1 [(s-1) \phi_n \phi_n'' + \phi_n \phi_n'] ds \\ \alpha_4 &= \int_0^1 \phi_n ds \end{aligned} \quad (2-30)$$

선형화된 보의 고유진동수와 유사하게 가진 시켰을 때의 응답을 구하여 본다. 가진 주파수는 다음과 같이 표현할 수 있고

$$\begin{aligned} \Omega = \omega_n (1 + \varepsilon^2 \sigma) \\ \text{where } \sigma: \text{detuning parameter} \end{aligned} \quad (2-31)$$

식(2-28)을 식(2-27)에 대입하고 해의 해석조건을 구하면 다음과 같다. 비선형 시스템의 해의 해석 조건은 비선형 진동계의 응답 해가 존재하는 조건을 의미한다.

$$-i(2\omega_n A' + \mu\omega_n A) - 3\alpha_1 A^2 \bar{A} + 2\alpha_2 \omega_n^2 \bar{A} A^2 + \alpha_3 g_0 A + \frac{1}{2} \alpha_4 f \omega_n^2 e^{i\omega_n \sigma t} = 0$$

where

$$\text{polar coordinate form of } A: A = \frac{1}{2} a(T_2) e^{i\theta(T_2)} \quad (2-32)$$

$$(\cdot) = \frac{\partial}{\partial T_1}$$

식(2-31)을 풀어 실수 부와 허수 부를 분리하여 정리하면 다음과 같다.

$$2\omega_n a' + \mu\omega_n a - \alpha_4 f \omega_n \sin \gamma = 0 \quad (2-33-a)$$

$$\left[2\omega_n \gamma' - (2\omega_n^2 \sigma + \alpha_3 g_0) - \left(\frac{1}{2} \alpha_2 \omega_n^2 - \frac{3}{4} \alpha_1 \right) a^2 \right] a - \alpha_4 f \omega_n^2 \cos \gamma = 0 \quad (2-33-b)$$

$$\gamma = \omega_n \sigma T_2 - \theta(T_2) \quad (2-33-c)$$

그리하여 1차 응답함수는 다음과 같이 표현된다.

$$v(s, t) = \phi_n(s) a(\varepsilon^2 t) \cos(\Omega t + \gamma) + \dots \quad (2-34)$$

안정조건은 만족하는 a, γ 는 식(2-31)으로부터 식(2-35)와 같은 조건을 만족하게 된다.

$$a' = \gamma' = 0 \quad (2-35)$$

또한 위상 및 변위에 관한 관계는 식(2-35)를 식(2-33)에 대입하여 정리하면 다음의 식(36)와 같은 식으로 표현 된다.

$$\sigma = \frac{1}{2\omega_n^2} \left[\begin{array}{l} -\alpha_3 g_0 - \left(\frac{1}{2} \alpha_2 \omega_n^2 - \frac{3}{4} \alpha_1 \right) a^2 \\ \pm (\alpha_4 f \omega_n^2) \sqrt{\left(\frac{1}{a^2} - \left(\frac{\mu\omega_n^2}{\alpha_4 f \omega_n^2} \right)^2 \right)} \end{array} \right] \quad (2-36)$$

식(2-36)는 진폭과 가진 위상과의 관계로 안정화 조건을 보여 주는 식으로써 위상 변화에 따른 진폭크기를 나타내준다. 즉 식(2-34)의 진동 응답은 해의 존재를 만족하며, 진동계의 안정 조건을 만족하는 식(2-35)과 식(2-36)를 만족하는 범위에서 존재하게 된다.

2.3 보의 진폭에 따른 고유진동수 재해석

가진력에 의한 변위가 매우 큰 비선형 보의 변위의 크기는 계의 고유 진동수에 영향을 미치게 된다. 특히 이러한 유연한 구조물에 대한 정밀한 제어를 할 경우에는 이러한 물리적인 현상에 대한 이해가 매우 중요하게 된다.

가진력에 의한 변위가 매우 큰 유연 구조물의 과 뎀핑 영향을 무시하였을때의 고유 진동수의 변화에 대하여 알아보자. 식(2-31)로부터

$$\mu = f = \sigma = 0 \quad (2-35)$$

을 만족한 조건에서, 식(2-35)를 식(2-33)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻게 된다.

$$2\mu\omega_n a' = 0 \quad (2-36-a)$$

$$-2\omega_n \theta' - \alpha_3 g_0 - \left(\frac{1}{2} \alpha_2 \omega_n^2 - \frac{3}{4} \alpha_1 \right) a^2 = 0 \quad (2-36-b)$$

식(2-36-a)에서 a는 상수임을 의미하고, 식(36-b)를 정리하면 다음과 같다.

$$\theta' = \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{3}{4} \alpha_1 - \frac{1}{2} \alpha_2 \omega_n^2 \right) a^2 - \alpha_3 g_0 \right] \quad (2-37)$$

식(2-37)에서 의미하는 바는 비선형 현상에 의한 고유진동수의

변화량은 식(2-30)에서 정의된 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta'$ 즉 변위의 크기가 반영된 항과 선형 시스템의 고유진동수 ' ω_n '에 영향을 받음을 알 수 있다. 매우 유연한 비선형 보의 고유 진동수는 결국 선형 고유진동수에 식(2-37)에서 산출된 비선형 영향에 의한 변화량을 더하여 산출되므로, 식(2-16), (2-37)으로부터 비선형 보의 변화된 고유진동수는

$$\omega_n' = \omega_n + \theta'$$

$$= \omega_n + \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{3}{4} \alpha_1 - \frac{1}{2} \alpha_2 \omega_n^2 \right) a^2 - \alpha_3 g_0 \right] \quad (2-38)$$

이다. 식(2-38)은 비선형 진동계의 진폭에 따른 고유진동수의 변화를 표시하는 식이다. 진폭의 크기가 증가할수록 고유진동수의 크기는 감소하게된다.

3. 결론

경량화된 장비는 고탄성 재질을 광범위 하게 사용하여 적은 중량으로 높은 하중을 견디게 하는 설계 개념을 적용하고 있다. 이러한 구조물은 가진 현상 발생시 혹은 제어 구동 시에 큰 변형이 발생하면 비선형 특성이 생성 된다. 이러한 비선형 현상의 특징 중에 시스템의 제어 성능에 영향을 주는 요소는 주파수 연동 현상과 고유 진동수 변화를 들 수 있으며, 본 연구에서는 이론적인 해석을 통하여 주파수 연동 현상과 고유진동수 변화 현상을 해석 하였다. 유연한 수직 외팔 보의 경우에 대하여 가진에 의한 변위를 Euler Bernoulli 이론에 근거를 둔 비선형 모델을 구하고 Multiple Scale Method와 Galerkin Method를 사용하여 이론적인 해를 구하였다. 보의 고유 진동수 재해석을 통하여 변위 및 보의 인자와 주파수의 관계로 표시되는 수학적 함수 관계를 도출하였다. 또한 2차(quadratic) 및 3차(cubic) 항이 포함된 일반적인 1자유도 비선형 진동계에 대한 이론 해를 구하고 주파수 연동현상을 분석 하였으며, 고유진동수의 재해석을 수행하여 그 변화되는 특성을 분석 하였다.

References

- [1] H. Neyfeh and P. E. Pai, 'Nonlinear Nonplaner Parametric Response of an Inextensioal Beam', Int. J. Nonlinear Mechanics, Vol. 24. No.2, pp139-158, 1989
- [2] L. D. Zavonday and A. H. Neyfeh, 'The Nonlinear Response of a Slender Beam Carring a Lumped Mass to a Principal Parametric Excitation', Int. J. Nonlinear Mechanics, Vol. 24. No.2. pp105-125, 1989
- [3] Ali Hasan Neyfeh and Dean T. Mook, Nonlinear Oscillation, John Wiley & Sons, 1979
- [4] M. R. Crespo du Silva and C. G. Glynn, 'Nonlinear Flexural Torsional Dynamics of Inextensional Beam',

- J. of Struct. Mech., 6(4), 437-448, 1978
- [5] J. W. Hou and J. Z. Yuan, Calculation of Eigenvalue and Eigenvector Derivative for Nonlinear Beam Vibrations, AIAA Journal, Vol.26, No.7, pp872-880
- [6] T. J. Anderson, B. Balachandran, A. H. Nayfeh, Nonlinear Response in a Flexible Cantilever Beam, Tran. of ASME, J. of Vibration and Acoustics, pp480-484